Chapitre 10

# Comparaison des fonctions

Dans tout le chapitre , $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ (c'est à dire $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$)

## I Fonctions négligeables

### 1) Définition :

**Définition 1**

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $D$.*
*On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $x_0$ lorsqu'il existe une fonction $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D$,*

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

*On note alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$ ou $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$*

**A noter :** *en pratique*
si $g$ ne s'annule pas au voisinage de $x_0$ (sauf eventuellement en $x_0$), dire que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $x_0$ équivaut à dire que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

**Exemple :**

Soit $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$, alors $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $f \underset{+\infty}{=} o(g)$, ou encore

$$x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$$

On peut montrer de la même manière avec le quotient que si $n < p$, alors

$$x^n \underset{+\infty}{=} o(x^p)$$

**Exemple à connaître : croissances comparées**
Cette notation permet d'écrire d'une autre manière les croissances comparées :

**Proposition 1**

*Soit $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors*

$$(\ln(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \qquad \text{et} \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$$

*Autrement dit, $\ln$ est négligeable devant toute puissance positive de $x$ à l'infini, et les puissances de $x \mapsto x$ sont négligeables devant toute puissance positive de $\exp$.*

▷ *Preuve* : comme $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0$, on a bien $(\ln(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$.
Même chose pour la deuxième.

◁

## 2) Opération sur les fonctions négligeables :

### a) Opérations usuelles :

**Propriété 1**

*Soit $f, g, h, f_1, f_2, g_1$ et $g_2$ des fonctions définie sur un même ensemble $D$ et $x_0 \in D$ (ou à la frontière)*

1. *Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h)$ alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$ (transitivité)*
2. *si $f_1 \underset{x_0}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{=} o(g_1 g_2)$ (produit autorisé)*
3. *si $f_1 \underset{x_0}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$, alors $f_1 + f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$ (somme possible... ou presque)*
4. *si $f = o(g)$ et que $f$ et $g$ ne s'annulent pas au voisinage de $x_0$, alors $\frac{1}{g} \underset{x_0}{=} o(\frac{1}{f})$ (inverse possible... en inversant les rôles !)*

▷ *Preuve :* Tout se démontre en faisant le quotient ou en jouant avec la définition. Par exemple pour (3) :
si $f_1 \underset{x_0}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$, alors $f_1(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ et $f_2(x) = \varepsilon_2(x)g(x)$ , donc $(f_1 + f_2)(x) = \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{=\varepsilon(x)} g(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ en $x_0$, donc $f_1 + f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$ ◁

**Remarque :**
La somme est possible mais les fonctions doivent être négligeables devant la même fonction $g$ !
Par exemple : $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ et $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$, donc $x^2 + \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$
Si c'est pas devant la même fonction $g$, on ne peut pas ajouter.

### b) Combinaisons linéaires

**Proposition 2**

*Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$, alors*

1. *si $f = o(g)$, alors si $\lambda \neq 0$, $f = o(\lambda g)$*
2. *si $f = o(g)$, alors $\lambda f = o(g)$*

▷ *Preuve :* immédiat avec la définition. ◁

Exemple : $x^2 \underset{0}{=} o(x)$, donc $2x^2 \underset{0}{=} o(x)$, mais aussi $x^2 \underset{0}{=} o(\frac{x}{2})$
Intérêt : on peut se débarasser des constantes ou en ajouter si besoin (contrairement aux équivalents....)
En généralisant et en utilisant les opérations élémentaires, on obtient :

**Corollaire 1**

*Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $f_1 \underset{x_0}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$, alors $\lambda f_1 + \mu f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$*

Exemple : soit $f(x) = x^{10} + 10^{100}x^4 + 3\ln x + 7x^2$. Comme chaque terme est négligeable devant $e^x$ en $+\infty$, on a directement $f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.

# II Fonctions équivalentes

## 1) Définition

### Définition 2

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $D$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $x_0$ si et seulement si il existe une fonction $U$ définie sur $D$ telle que, $\forall x \in D, f(x) = U(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} U(x) = 1$.*

*On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$, ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, ou encore $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$*

Et on a également la caractérisation immédiate suivante :

**A noter :** *En pratique...*

Soient $f$ et $g$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $x_0$. Alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

**Exemple :**
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, donc $\sin x \underset{0}{\sim} x$.

**Remarque importante :**
La seule fonction équivalente à 0 est donc la fonction nulle.
Je ne veux surtout pas vous voir écrire $f \sim 0$ !!

## 2) Lien avec les fonctions négligeables :

### Proposition 3

*Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $D$. Alors $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{x_0}{=} g + o(g)$*

▷ *Preuve :*

◁

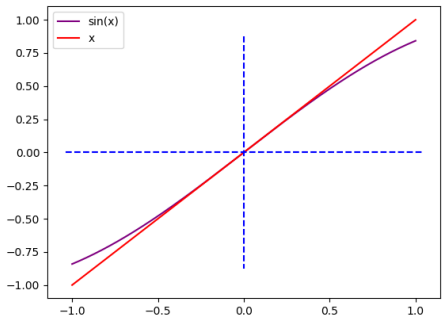
**Par exemple :**
$e^x - x \underset{+\infty}{=} e^x + o(e^x)$, donc $e^x - x \underset{+\infty}{\sim} e^x$.

## 3) Interprétation et lien avec les limites

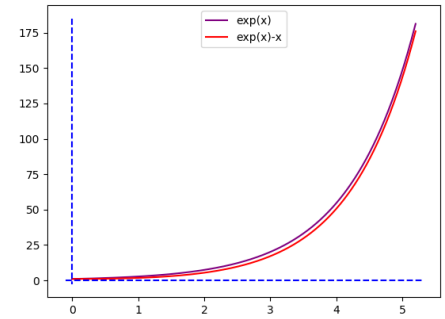
### a) Des fonctions "presque égales" :

Dire que $f \underset{x_0}{\sim} g$ signifie que $f(x) = u(x)g(x)$ avec $u(x)$ qui tend vers 1 quand $x$ tends vers $x_0$.
Autrement dit, $u(x)$ est "presque égal" à 1, donc $f$ est presque égal à $g$...

Par exemple, on a vu que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$. Graphiquement, cela se traduit par :




De même, on vient de voir que $e^x - x \underset{+\infty}{\sim} e^x$. Quand on trace les deux fonctions, on voit :




### b) Lien avec les limites :

**Proposition 4**

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage d'un point $x_0$ et telles que $f \underset{x_0}{\sim} g$. Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe et les limites sont alors égales.*

▷ *Preuve :*

◁

**Exemple :**
On a vu que

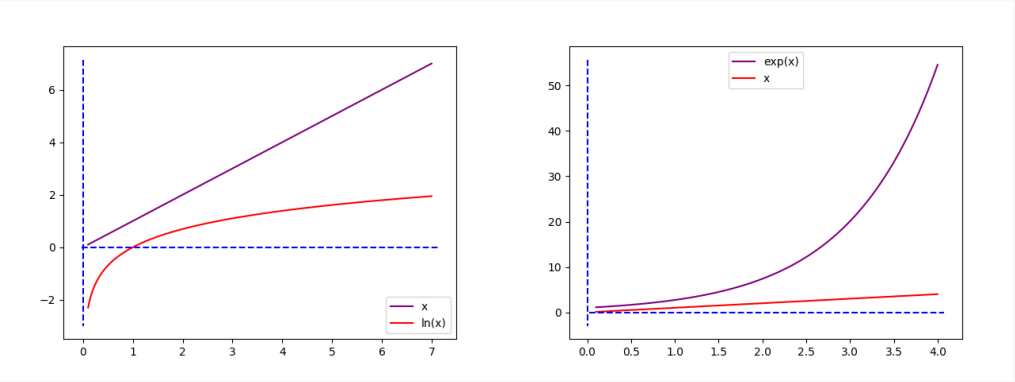
$$e^x - x \underset{+\infty}{\sim} e^x$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, on a immédatement

$$\lim_{x \to +\infty} e^x - x = +\infty$$

**Danger !** *Même limite ne veux pas dire équivalents !*

Etre équivalent veut dire bien plus que "même limite". Par exemple les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ ont toutes les trois pour limite $+\infty$, mais ne sont pas du tout équivalentes :




## 4) Équivalents usuels

### a) Polynômes :

**Proposition 5**

*Soit* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *avec* $a_n \neq 0$, *alors* $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$ *et* $P(x) \underset{-\infty}{\sim} a_n x^n$

*Autrement dit, un polynôme est équivalent en l'infini à son terme de plus haut degré.*

▷ *Preuve :*

◁

**Danger !** *théorème valable uniquement en* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Contre exemple en 0 : soit $P(x) = x^3 + 4x^2 + x$

Alors $P(x) = x(x^2 + 4x + 1)$ et donc en posant $u(x) = x^2 + 4x + 1$ on a $u(x) \to 1$ et $P(x) \underset{0}{\sim} x$.

En revanche $\dfrac{P(x)}{x^3} = 1 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ tend quant à lui vers $+\infty$ si $x \to 0^+$ : $P(x)$ n'est pas équivalent à $x^3$....

On pourrait en fait montrer qu'en 0, un polynôme est équivalent à son monôme de plus petit degré...

### b) A partir de la dérivation :

Nous avons rappelé dans la partie méthode élémentaire des limites usuelles issues des dérivées. Si on rajoute à cette liste la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, on montre aisément que :

**Proposition 6**

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ *et* $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$.
2. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ *et* $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *($\alpha$ doit être constante)*, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$,
4. *En particulier,* $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$

### c) Cas particulier : cos

On admet le résultat ci dessous, qu'on montrera plus facilement au second semestre :

**Proposition 7**

$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}$ *et par substitution, si* $u$ *est telle que* $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$,

$$\cos(u(x)) - 1 \underset{a}{\sim} \frac{-(u(x))^2}{2}$$

# III Calcul avec des équivalents :

## 1) Propriétés algébriques :

**Propriété 2**

*(i) si* $f \underset{x_0}{\sim} g$, *alors* $g \underset{x_0}{\sim} f$ *(relation symétrique)*

*(ii) si* $f \underset{x_0}{\sim} g$ *et* $g \underset{x_0}{\sim} h$, *alors* $f \underset{x_0}{\sim} h$ *(relation transitive)*

▷ *Preuve :*

◁

Cela signifie qu'on va pouvoir faire des "enchainements" d'équivalents....

## 2) Opérations usuelles

### a) Produit et quotient

**Propriété 3**

1. $\forall \lambda \neq 0$, *si* $f \underset{x_0}{\sim} g$, *alors* $\lambda f \underset{x_0}{\sim} \lambda g$ *(produit par un scalaire autorisé)*
2. *si* $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ *alors* $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ *(produit d'équivalents autorisé)*
3. *si* $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, *et* $f_2$ *ne s'annule pas au voisinage de* $x_0$, *alors*
   $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$ *(quotient d'équivalents autorisé)*
   *En particulier si* $f \underset{x_0}{\sim} g$, $\dfrac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$ *(passage à l'inverse autorisé)*

▷ *Preuve :* Tout se montre avec les définitions très facilement. Par exemple pour le produit :

◁

### b) Rares compositions autorisées :

**Propriété 4**

1. *Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $f^p \underset{x_0}{\sim} g^p$*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $f > 0$ et $g > 0$, si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$, et en particulier si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $\sqrt{f} \underset{x_0}{\sim} \sqrt{g}$.*
3. *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $|f| \underset{x_0}{\sim} |g|$ (passage à la valeur absolue autorisée)*

▷ *Preuve* : Encore une fois, très simple avec la définition... ◁

**Exemple :**

Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{(x^5 + x^4 + 3x^2)^8}{(x^6 + 4x^4 - x^3 + 2x)^7}$.

### c) Ce qu'on n'a pas le droit de faire :

Presque tout le reste... En cas de doute, revenir à la définition ou faire le quotient : si ça tend vers 1, c'est bon, sinon, c'est perdu.

En particulier :

**Danger !** *Sommes d'équivalents interdites*

Sauf exceptions, la somme d'équivalent n'est pas possible.
Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, on n'a pas forcément $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

**Exemple :**

Soit $f_1(x) = x^2 + 2$, $f_2(x) = x^2 + x$ et $g(x) = -x^2$.

**Danger !** *Compositions par une fonction interdites*

Composer par des fonctions autres que celles proposées dans la partie 4c est interdit.
Ainsi, si $f \underset{x_0}{\sim} g$, on a pas forcément $h \circ f \underset{x_0}{\sim} h \circ g$.

**Exemple :**

$x^2 + x \sim x^2$, mais si on regarde $e^{x^2+x}$ et $e^{x^2}$, on a :

## 3) Substitution

**Proposition 8**

*Soif $u : D' \to D$ une fonction avec $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = x_0$. Soient $f$ et $g$ telle que $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, alors $f(u(t)) \underset{t_0}{\sim} g(u(t))$.*

▷ *Preuve* : comme $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, par composition de limite, comme $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = x_0$, on a tout de suite $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(u(t))}{g(u(t))} = 1$ ◁

**Exemple :**
Donnez un équivalent de $\sin(e^{-x})$ :

De manière générale, on peut retenir que :

**Proposition 9**

*si $u$ est une fonction telle que* $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} (u(x)) = 0}$, *on a :*

1. $\sin(u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$ *et* $\tan(u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$
2. $\ln(1 + u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$ *et* $e^{u(x)} - 1 \underset{x_0}{\sim} u(x)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1 + u(x))^\alpha - 1 \underset{x_0}{\sim} \alpha u(x)$
4. *en particulier,* $\sqrt{1 + u(x)} - 1 \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{2} u(x)$